

Graphes : structures relationnelles



4.1 Les graphes : un modèle mathématique pour les structures relationnelles

L'histoire de la **théorie des graphes** débiterait avec les travaux d'Euler au 18ème siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème du coloriage de cartes et du plus court trajet entre deux points.

C'est plus récemment, en 1822, que le mot « graphe » est introduit par le mathématicien et géomètre anglais James Joseph Sylvester. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, mais encore l'**informatique**.

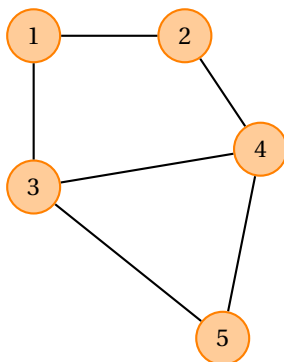
Les situations faisant appel à un graphe se rencontrent partout : réseaux de télécommunications, circuits électriques, bases de données relationnelles, représentation des molécules, ordonnancement de tâches...



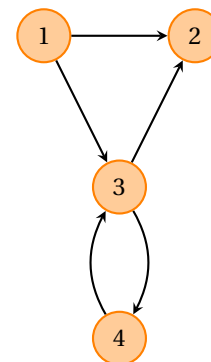
Les lignes de bus à Ajaccio : un graphe parmi d'autres !

4.1.1 Notion de graphe

Un graphe est une structure de données constituée d'objets, appelés **sommets**, et de **relations** entre ces sommets. Le nombre de sommets est appelé **ordre** du graphe. On distingue deux types de graphes :



Les **graphes non orientés** : les relations sont appelées des **arêtes**



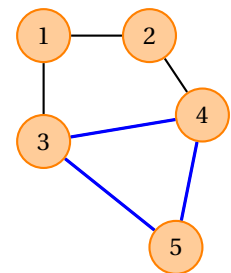
Les **graphes orientés** : les relations sont appelées des **arcs**

4.1.2 Un peu de vocabulaire

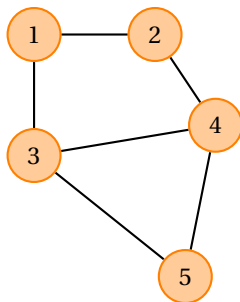
Graphes non orientés

- On note $x - y$ l'arête joignant les sommets x et y dans un graphe non orienté
- Deux arêtes sont dites **adjacentes** si elles ont pour extrémité un même sommet
- Deux sommets d'un graphe non orienté sont dits **adjacents** s'il existe une arête les joignant
- Dans un graphe non orienté, on appelle **degré d'un sommet** x le nombre d'arêtes dont x est une extrémité
- Dans un graphe non orienté, on appelle **chaîne** toute suite de sommets consécutifs reliés par des arêtes

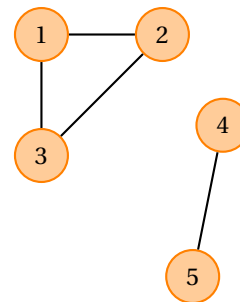
- La **distance** entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne entre ces deux sommets.
- Le **diamètre du graphe** est la plus grande distance entre deux sommets.
- Une chaîne est dite **élémentaire** si elle ne comporte pas plusieurs fois le même sommet
- Une chaîne dont le sommet de début est le même que le sommet de fin est appelée **cycle**
- Un graphe non orienté est dit **connexe** lorsqu'il existe toujours une chaîne reliant deux sommets quelconques.



Un exemple de cycle :
3 - 4 - 5 - 3

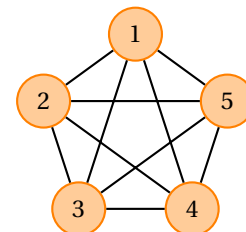


Un graphe connexe



Un graphe non connexe

- Un graphe non orienté **non connexe** se décompose en **composantes connexes**. Dans l'exemple ci-dessus, les deux composantes connexes sont $\{1, 2, 3\}$ et $\{4, 5\}$.
- Un graphe non orienté est dit **complet** si tous les sommets sont adjacents deux à deux.



Un graphe complet

Exemple. Quatre villes A , B , C et D sont reliées par un réseau routier. A est reliée à B et C , et B est reliée à C et D .

Question 01 Représenter la situation précédente à l'aide d'un graphe non orienté.

Question 04 Donner deux sommets adjacents.

Question 05 Donner le degré de chaque sommet.

Question 02 Quel est l'ordre de ce graphe ?

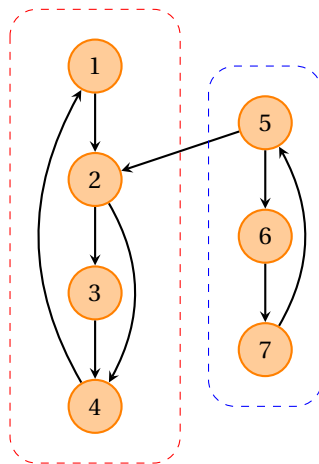
Question 06 Ce graphe comporte-t-il un cycle ?

Question 03 Ce graphe est-il connexe ? complet ?

Question 07 Quel est le diamètre de ce graphe ?

Graphes orientés

- On note $x \rightarrow y$ l'arc reliant le sommet x au sommet y dans un graphe orienté. x est appelé **prédécesseur** de y , et y est appelé **successeur** de x .
- Deux arcs d'un graphe orienté sont dits **adjacents** s'ils possèdent au moins une extrémité commune.
- Deux sommets d'un graphe orienté sont dits **adjacents** s'il existe un arc les joignant.
- Dans un graphe orienté, on appelle **degré d'un sommet** x le nombre d'arc dont x est une extrémité.
- Dans un graphe orienté, on appelle **chemin** toute suite de sommets consécutifs reliés par des arcs.
- Un chemin est dit **élémentaire** s'il ne comporte pas plusieurs fois le même sommet.
- Un chemin dont le sommet de début est le même que le sommet de fin est appelé **circuit**.
- Un graphe orienté est dit **fortement connexe** lorsque pour toute paire de sommets distincts (x, y) , il existe un chemin de x vers y et un chemin de y vers x .
- Un graphe orienté **non fortement connexe** se décompose en composantes fortement connexes.



Décomposition d'un graphe non fortement connexe en composantes fortement connexes

Exemple. Un site internet est composé de quatre pages A , B , C et D . Sur chaque page sont présents des liens envoyant vers d'autres pages.

- Sur A sont présents des liens vers B et C .
- Sur B sont présents des liens vers A et C .
- Sur C figure un lien envoyant vers D .
- Sur D sont présents deux liens vers A et B .

Question 08 Représenter la situation précédente par un graphe orienté.

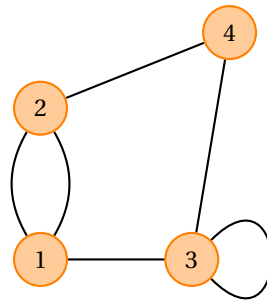
Question 09 Décrire les prédécesseurs et les successeurs de A .

Question 10 Ce graphe est-il fortement connexe ?

Question 11 Dans la situation précédente, que signifierait un graphe non fortement connexe ?

4.1.3 Multigraphes

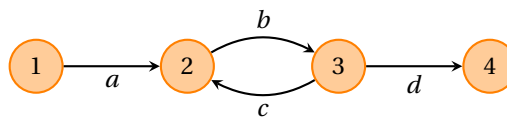
Un graphe est dit **simple** si au plus une relation relie deux sommets x et y , et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. Un graphe qui n'est pas simple est appelé un **multigraphe**.



Exemple de multigraphe non orienté

4.1.4 Graphes étiquetés - Graphes pondérés

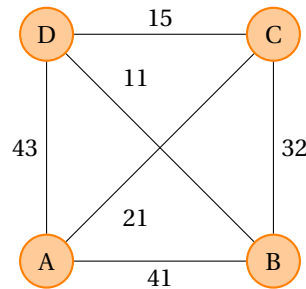
On appelle **graphe étiqueté** tout graphe (orienté ou non) où chaque relation est affectée d'un symbole, comme une lettre, un mot, ou encore un nombre.



Exemple de multigraphe orienté étiqueté

Remarque. Ce genre de graphe est souvent utilisé pour la reconnaissance de mots. Par exemple, le graphe ci-dessus « reconnaît » les mots abd , $abcd$ et $abcbcd$ (le sommet 1 représente l'entrée, et le sommet 4 la sortie).

Dans le cas où le symbole utilisé est un nombre positif, on parle de **graphe pondéré**. Ce type de graphe permet de représenter une carte routière ou un réseau de routeurs, les pondérations représentant les distances (temporelles, spatiales ou autre) entre deux sommets.



Distance en km joignant 4 villes A, B, C et D

Dans le cas d'un graphe pondéré, on appelle **poids** le nombre positif de l'étiquette d'une relation. On peut alors définir le poids d'une chaîne (ou d'un chemin) comme la somme des poids des arêtes (ou des arcs) qui la (le) composent.

☞ *Un problème classique est celui du plus court chemin : comment relier deux sommets le plus « rapidement » possible, autrement quel est le chemin de poids minimal reliant deux sommets ?*

Question 12 Déterminer le plus court chemin (ou la plus courte chaîne) reliant les sommets A et D dans le graphe ci-dessus.

4.2 Représentation d'un graphe

4.2.1 Représentation matricielle

En mathématiques, une matrice de taille $n \times m$ est un tableau de n lignes et de m colonnes, chaque case contenant un nombre, appelé **coefficient**. Chaque coefficient est identifié par deux indices i et j , correspondant respectivement à la ligne et à la colonne sur lesquelles se trouve ce coefficient.

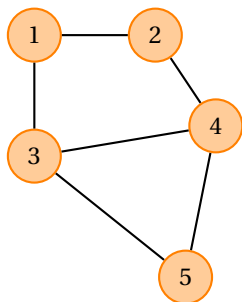
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Par exemple, en notant a_{ij} les coefficients de la matrice A ci-dessus, on a $a_{11} = 1$, $a_{31} = 7$, ou encore $a_{23} = 6$.

Étant donné un graphe non étiqueté à n sommets S_1, S_2, \dots, S_n , on peut lui associer sa **matrice d'adjacence** constituée des coefficients a_{ij} définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} k & \text{s'il existe } k \text{ relations entre } S_i \text{ et } S_j \\ 0 & \text{si } S_i \text{ et } S_j \text{ ne sont pas adjacents} \end{cases}$$

Voici un exemple de graphe avec sa matrice d'adjacence associée (par ordre croissant des sommets) :



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour remplir cette matrice, on regarde sommet par sommet le nombre de relations avec les sommets adjacents.

- Le sommet 1 possède 1 relation avec le sommet 2, et 1 relation avec le sommet 3. La première ligne de la matrice est :

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

Il s'agit du nombre de relations du sommet 1 avec chaque autre sommet, dans l'ordre croissant des sommets.

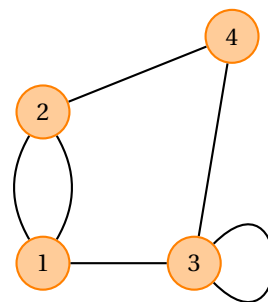
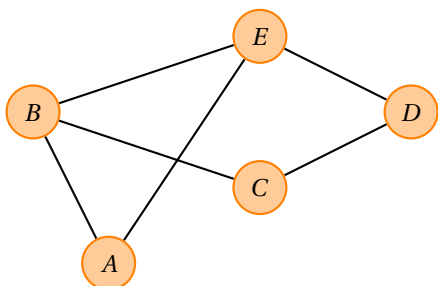
- Le sommet 2 possède 1 relation avec le sommet 1, et 1 relation avec le sommet 4, donc la 2ème ligne de la matrice est :

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

- ... etc ...

☞ La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est **symétrique**, c'est à dire que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous entiers i et j

Question 13 Donner les matrices d'adjacence des graphes suivants :



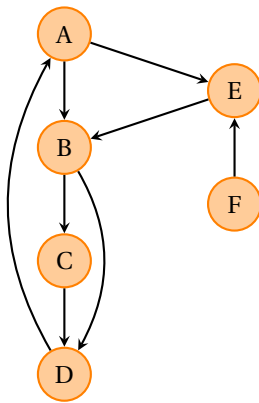
Question 14 Dans chaque cas, dessiner le graphe correspondant à la matrice d'adjacence donnée, les sommets étant notés A, B, C et D (dans cet ordre) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Listes d'adjacence

Pour représenter un graphe orienté, on peut également utiliser une matrice d'adjacence mais il faut préciser dans quel sens lire la matrice (en ligne ou en colonne) pour connaître le sens de la relation.

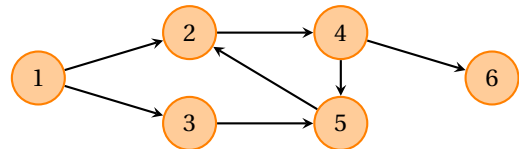
On préfère alors représenter un graphe orienté par des **listes de successeurs** et des **listes de prédécesseurs**.



Sommet	Successeurs	Prédécesseurs
A	B, E	D
B	C, D	A, E
C	D	B
D	A	B, C
E	B	A, F
F	E	∅

Les listes des successeurs et des prédécesseurs du graphe ci-contre

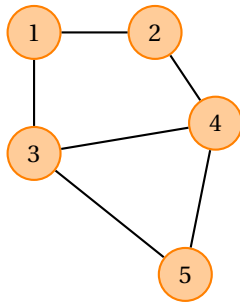
Question 15 Donner les listes des successeurs et des prédécesseurs des graphes orientés suivants :



Question 16 Donner le graphe associé aux listes de prédécesseurs suivantes :

Sommet	Prédécesseurs
A	E, F
B	∅
C	A, F
D	D, F
E	∅
F	B, C

Cette même représentation s’applique aux graphes non orientés, mais les relations étant symétriques, il n’y a pas des listes de successeurs et de prédécesseurs mais des **listes de voisins** :



Sommet	Voisins
1	2,3
2	1,4
3	1,4
4	2,3,5
5	3,4

Les listes des voisins du graphe ci-contre

Question 17 Donner le graphe associé aux listes de voisins suivantes :

Sommet	Voisins
A	C, D, E
B	C, D, E
C	A, B, D
D	A, B, C, E
E	A, D, B

4.2.3 Représentation abstraite d’un graphe

Graphes non orientés

On peut représenter un graphe à l’aide des fonctions abstraites suivantes :

- CREER_GRAPHE_VIDE() : retourne un objet de type Graphe, ne contenant ni sommet ni arête
- AJOUTER_SOMMET(G, S) : ajoute le sommet S au graphe G
- AJOUTER_ARETE(G, S1, S2) : ajoute une arête entre les sommets S1 et S2 du graphe G
- SUPPRIMER_SOMMET(G, S) : supprime le sommet S du graphe G
- SUPPRIMER_ARETE(G, S1, S2) : supprime l’arête entre les sommets S1 et S2 du graphe G
- SOMMET_EXISTE(G, S) : retourne Vrai si le graphe G contient le sommet S, et Faux sinon
- ARETE_EXISTE(G, S1, S2) : retourne Vrai si le graphe G contient une arête entre les sommets S1 et S2

Question 18 Représenter graphiquement le graphe G décrit par les instructions suivantes :

```

1  G = CREER_GRAPHE_VIDE()
2  AJOUTER_SOMMET(G, A)
3  AJOUTER_SOMMET(G, B)
4  AJOUTER_SOMMET(G, C)
5  AJOUTER_SOMMET(G, D)
6  AJOUTER_SOMMET(G, E)
7  AJOUTER_ARETE(G, A, B)
8  AJOUTER_ARETE(G, A, D)
9  AJOUTER_ARETE(G, B, E)
10 AJOUTER_ARETE(G, C, D)
11 AJOUTER_ARETE(G, C, E)

```

Question 19 Pour ajouter un sommet avec la fonction `AJOUTER_SOMMET(G, S)`, quelle condition faisant intervenir la fonction `SOMMET_EXISTE(G, S)` doit être vérifiée?

Question 20 Pour ajouter une arête avec la fonction `AJOUTER_ARETE(G, S1, S2)`, quelles conditions faisant intervenir les fonctions `SOMMET_EXISTE(G, S)` et `ARETE_EXISTE(G, S1, S2)` doivent être vérifiées?

Graphes orientés

On peut représenter de même des graphes orientés de façon abstraite, les fonctions `AJOUTER_ARETE(G, S1, S2)` et `SUPPRIMER_ARETE(G, S1, S2)` étant remplacées par `AJOUTER_ARC(G, S1, S2)` et `SUPPRIMER_ARC(G, S1, S2)`.

⚠ Attention : les relations dans un graphe orienté sont unilatérales. `AJOUTER_ARC(G, A, B)` et `AJOUTER_ARC(G, B, A)` réalisent des relations différentes!

Question 21 Représenter graphiquement le graphe G décrit par les instructions suivantes :

```

1  G = CREER_GRAPHE_VIDE()
2  AJOUTER_SOMMET(G, 1)
3  AJOUTER_SOMMET(G, 2)
4  AJOUTER_SOMMET(G, 3)
5  AJOUTER_SOMMET(G, 4)
6  AJOUTER_SOMMET(G, 5)
7  AJOUTER_SOMMET(G, 6)
8  AJOUTER_ARC(G, 1, 2)
9  AJOUTER_ARC(G, 2, 4)
10 AJOUTER_ARC(G, 5, 2)
11 AJOUTER_ARC(G, 4, 5)
12 AJOUTER_ARC(G, 1, 3)
13 AJOUTER_ARC(G, 3, 5)
14 AJOUTER_ARC(G, 4, 6)
15 AJOUTER_ARC(G, 2, 5)

```

Question 22 Dans l'exemple précédent, que retournent les instructions suivantes ?

1. `ARC_EXISTE(G, 5, 2)`
2. `ARC_EXISTE(G, 5, 3)`

4.3 Exercices

Exercice 01 On s'intéresse à un **graphe social**, c'est à dire un graphe pour lequel les sommets sont des personnes et les liens représentent la relation "être ami".

1. Explicitez, dans le contexte de l'exercice, chacun des termes vus précédemment :

Sommets adjacents	Graphe connexe	Degré d'un sommet
Graphe complet	Ordre du graphe	Diamètre du graphe

2. Considérons un réseau social ayant 6 abonnés A,B,C,D,E,F dans lequel :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

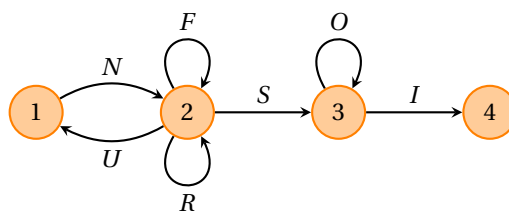
Représenter ce réseau social par un graphe. Déterminer son ordre et son diamètre.

Exercice 02 Un tournoi oppose 4 équipes, numérotées de 1 à 4. Chaque équipe rencontre une seule fois toutes les autres.

- Représenter la situation par un graphe.
- Combien d'arêtes possède-t-il? En déduire le nombre de rencontres pour ce tournoi.
- Ce graphe est-il connexe? complet?
- (Bonus)** Combien de rencontres y a-t-il dans un tournoi opposant n équipes?

☞ Cette dernière question peut être formulée : « combien d'arêtes composent un graphe complet d'ordre n ? »

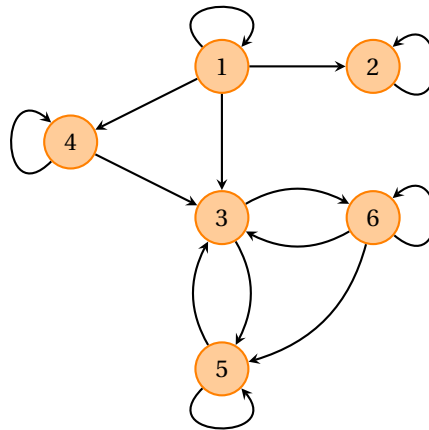
Exercice 03 On considère le graphe orienté étiqueté suivant, dont le rôle est de lire un code entré par l'utilisateur et de décider si ce code est correct ou non. Un code est correct si les lettres le contenant se succèdent en partant du sommet 1 et en sortant par le sommet 4 :



- Parmi les codes suivants, lesquels sont corrects ?

NUNSOI
NFSI
NRSSOI
- Quel est le code correct contenant le moins de caractères possible?
- Donner un code correct de longueur 8. Y a-t-il une limite à la longueur des codes corrects?

Exercice 04 On donne le graphe suivant :



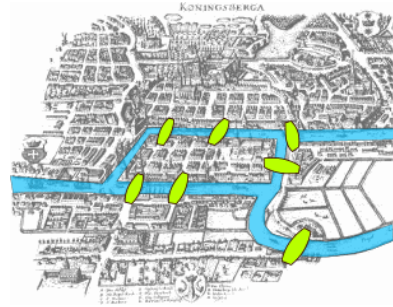
1. Donner une représentation de ce graphe au moyen d'une liste d'adjacence.
2. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

Compléments

Exercice 05 *Un exemple historique*

Historiquement, la théorie des graphes prend naissance au 17ème siècle à Königsberg (actuellement la ville russe Kaliningrad) dans laquelle 7 ponts permettent de relier les 4 différentes parties de la ville traversée par une rivière.

Le problème connu à l'époque était de savoir s'il était possible de se promener dans la ville en traversant chaque pont une seule fois, et en revenant finalement au point de départ.



1. Qu'en pensez-vous ?
2. Représenter la situation par un graphe, en notant A, B, C et D les différents quartiers de la ville.

C'est au génial mathématicien **Leonhard Euler** que l'on doit la résolution de ce problème en 1736. Ce dernier ne s'est pas contenté de répondre à ce problème en particulier, mais a répondu du manière générale par un théorème, qui porte aujourd'hui son nom :

Théorème d'Euler

- On peut trouver un chemin reliant les sommets d'un graphe connexe en passant une et une seule fois par toutes les arêtes si et seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.
- S'il n'y a aucun sommet de degré impair, alors le départ et l'arrivée du chemin sont confondus.

3. Calculer le degré de chacun des sommets de ce graphe et répondre au problème précédent avec le théorème d'Euler.

Exercice 06 Sur la rive d'un fleuve se trouvent un loup, une chèvre, une salade et un passeur dont le rôle consiste à faire passer animaux et objets sur l'autre rive à l'aide d'une barque. Cependant, il y a des règles à respecter :

- La chèvre et la salade ne peuvent pas rester sur la même rive sans le passeur
- Il en est de même pour la chèvre et le loup
- Le passeur ne peut mettre qu'un seul « passager » avec lui dans la barque

On décide de représenter le passeur par la lettre P, la chèvre par la lettre C, le loup par la lettre L et la salade par la lettre S.

1. Représenter ce problème à l'aide d'un graphe où les sommets sont les états possibles sur la rive de départ (par exemple, PLCS est l'état de départ, où tout le monde est sur la rive de départ).
2. Trouver alors une solution au problème en indiquant chaque déplacement, à l'aide du graphe précédent.